EGGE 1111 - Mathématiques - Analyse
Test mars 07

Question 1.

1. Calculer
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx\,.$$
2. Calculer
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3}\, dx\,.$$

Réponses.

1. La première primitive se calcule par partie. Une primitive de $1/x^2$ est $-1/x$ et la dérivée de $\ln x$ est $1/x$. La réponse est donc
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$
2. Une primitive de $\frac{1}{(x+1)^3}$ est $F(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2}$. Si N est un nombre réel supérieur à 2, on a alors
$$\int_2^N \frac{1}{(x+1)^3}\, dx = F(N) - F(2) = \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{2(N+1)^2}\,.$$
On calcule
$$\lim_{N\to+\infty} \int_2^N \frac{1}{(x+1)^3}\, dx = \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{1}{18}\,.$$
Il en résulte que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3}\, dx$ converge et que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3}\, dx = \frac{1}{18}$.

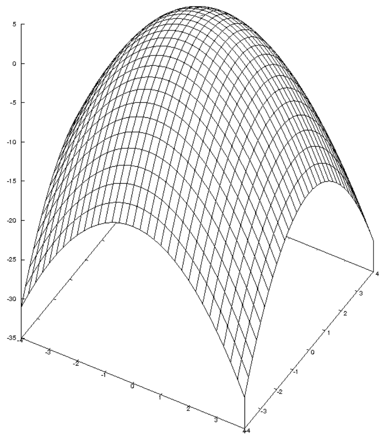
Question 2.

On donne la fonction $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

1. Dessiner les courbes de niveau de hauteur -3, 1 et 3.
2. Représenter une courbe iso-x associée à $f(x, y)$.
3. Représenter le graphe de cette fonction.

Réponses

1. La courbe de niveau de hauteur -3 est le cercle centré en l'origine et de rayon 2.
La courbe de niveau de hauteur 1 est le point $(0, 0)$.
La surface ne contient aucun point de hauteur 3.
2. Les courbes iso-x sont des paraboles $z = a - y^2$ centrées sur l'axe des y et dont la convexité est tournée vers le bas.
3.



Question 3.

Calculer les limites suivantes ou prouver qu'elles n'existent pas

1.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4 - y^2}$$

2.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{\sqrt{x^4 + y^2}}$$

Réponses.

1. La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4-y^2}$ n'existe pas car on peut trouver deux chemins différents sur lesquels les limites sont différentes. Sur le chemin $y = 0$, la fonction devient $f(x, 0) = 0$ et la limite de $f(x, y)$ lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ sur ce chemin vaut 0. Par contre sur le chemin $y = x$, la fonction devient $\frac{x^2}{x^4-x^2} = \frac{1}{x^2-1}$ et la limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ sur ce chemin vaut -1.

2. On peut remarquer que $x^2 = \sqrt{x^4} \leq \sqrt{x^4 + y^2}$, et donc que
$$0 \leq |\frac{x^3y}{\sqrt{x^4 + y^2}}| = |xy| \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^2}} \leq |xy|$$
Comme les extrêmes tendent vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, il en est de même du terme central, et on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{\sqrt{x^4+y^2}} = 0$.