NOM et Pr. :

ECGE 1214 - Examen de Janvier 2006 - Partie 1 - Série C

Toutes les démarches doivent être justifiées. Le verso des feuilles peut être utilisé.

A. Survol de la matière (environ 40% des points)

Quand il y a lieu, il faut cocher la ou les réponses correctes.

A.1. Les $\overline{f}_i$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On suppose que la suite $(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$ est libre.
Les suites ci-dessous sont-elles encore libres ?

	Oui	Non	Peut-être
$(\overline{f}_1+\overline{f}_2, \overline{f}_3, \overline{f}_2-\overline{f}_1)$	○	○	○
$(\overline{f}_2, \overline{f}_1)$	○	○	○
$(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3, \overline{f}_1-\overline{f}_2-\overline{f}_3)$	○	○	○
$(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3, \overline{f}_4)$	○	○	○
$(\overline{f}_1, \overline{f}_1+\overline{f}_2, \overline{f}_1+\overline{f}_2+\overline{f}_3)$	○	○	○

Justifiez en détail.

A.2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Ecrivez sous forme de polynôme la forme quadratique associée à A.

2. Calculez tous les mineurs principaux primaires de A.

$M_1 =$ $M_2 =$ $M_3 =$

3. Le genre de cette forme quadratique est

Justifications au verso.

A.3. A est une matrice carrée symétrique d'ordre 5. Sa deuxième ligne, L_2 , ne comporte aucun élément nul.
On applique à A la transformation élémentaire $L_4 - 7L_2$.
Alors

	ne change(nt) certainement pas	change(nt) certainement	peu(ven)t changer ou ne pas changer
la trace de A	◯	◯	◯
l'espace ligne de A	◯	◯	◯
le noyau de A	◯	◯	◯
le déterminant de A	◯	◯	◯
le rang de A	◯	◯	◯
le polynôme caractéristique de A	◯	◯	◯

En cas de doute, vous pouvez cocher deux réponses que vous jugez possibles, éliminant ainsi la troisième que vous déclarez fausse. Cela pourra vous valoir une partie des points.

Justifiez brièvement vos réponses, par un théorème vu, par un bref raisonnement ou en suggérant un contre exemple.

B. Questions théoriques (environ 25% des points)

B.1.

1. Définissez ce qu'est l'adjointe d'une matrice carrée.
2. Donnez le lien entre l'adjointe d'une matrice carrée et son inverse.

B.2. Démontrez que si une matrice carrée est diagonalisable alors son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres.

NOM et Pr. :

C. Exercice (environ 35% des points)

C.1. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculez Ker A.
2. Donnez la dimension et une base orthonormée de Ker A.
3. Montrez que A admet la valeur propre 4.
   Donnez-en la multiplicité géométrique et une base orthonormée du sous espace propre associé.
4. Calculez les autres valeurs propres de A.
5. Donnez le genre de la forme quadratique $X^t A X$.