Examen de juin

A. Survol de la matière (environ 40% des points)

A.1. A est une matrice 4×5 et B une matrice 5×3.
Complétez le tableau suivant ; chaque ligne correspond à un cas différent à analyser. Pour certains cas, il peut y avoir plusieurs réponses possibles ; donnez-les toutes. Certains cas sont impossibles ; signalez-les.

$r(A)$	dim Ker A	$r(B)$	dim Ker B	$r(AB)$	dim Ker AB
2			1	2	
	2	1			
	1		2		1
	1			3	

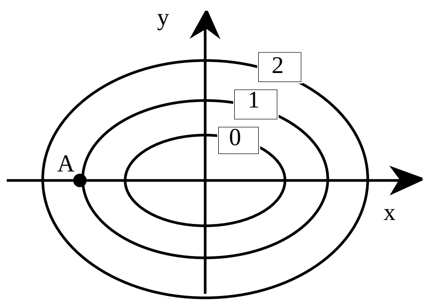
A.2. A, B et C sont des matrices carrées d'ordre 3 telles que

$$\det(A) = 3 \qquad \det(B) = -2 \qquad \mathrm{r}(C) = 1.$$

$\det(\frac{1}{2}A) = \boxed{}$ $\qquad$ $\det(A^2B^{-1}A^t) = \boxed{}$

$\det(B^{-1}ACB) = \boxed{}$ $\qquad$ $\mathrm{rang}(AC) = \boxed{}$

A.3. Voici quelque courbes de niveau d'une fonction f de classe $\mathcal{C}_2$.



On peut en déduire que

	< 0	$= 0$	> 0
$\frac{\partial f}{\partial x}(A)$			
$\frac{\partial f}{\partial y}(A)$			
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$			
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$			

A.4. f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}_1$.
$g(x,y) = \Big(g_1(x,y)\ ,\ g_2(x,y)\Big)$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}_1$.
On donne

$$g(0,0) = (1,0)$$

$$\begin{array}{llll} \partial_1 g_1(0,0) = 2 & \partial_1 g_2(0,0) = -1 & \partial_1 f(0,0) = 3 & \partial_1 f(1,0) = -3 \\ \partial_2 g_1(0,0) = 4 & \partial_2 g_2(0,0) = -3 & \partial_2 f(0,0) = -1 & \partial_2 f(1,0) = 7 \end{array}$$

Calculez $\dfrac{\partial\,(f \circ g)}{\partial x}(0,0) = \boxed{}$

A.5. En maximisant $z = f(x,y)$ sous la contrainte

$$\begin{cases} g_1(x,y) \leq 1 \\ g_2(x,y) \leq 2 \end{cases}$$

on a obtenu, grâce au théorème de Kuhn-Tucker, le point (a,b) qui est <u>un extremum</u> de f sous ces conditions. En ce point, les calculs ont donné $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$ et $f(a,b) = 5$.
Alors (a,b)

	certainement	certainement pas	peut-être
est tel que $g_1(a,b) = 1$	○	○	○
est tel que $g_2(a,b) = 2$	○	○	○

Si les contraintes sont modifiées en

$$\begin{cases} g_1(x,y) \leq 0.97 \\ g_2(x,y) \leq 2.02 \end{cases},$$

le nouvel extremum aura comme valeur approximative $\boxed{}$.

B. Questions théoriques (environ 20% des points)

B.1. Démontrez que toute matrice qui peut être diagonalisée au moyen d'une matrice orthogonale est nécessairement symétrique.

B.2. Parmi les théorèmes liant le genre d'une matrice symétrique et les signes de ses mineurs principaux primaires ou de ses mineurs principaux, énoncez ceux, et seulement ceux, qui peuvent s'exprimer sous la forme de conditions nécessaires et suffisantes.

B.3. $g_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, $g_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ et $g_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}$ et $\overline{a}$ est un point de $\mathbb{R}^5$ qui annule ces trois fonctions.

1. Donnez la forme que pourrait prendre une explicitation locale de la relation $g_1(\overline{x}) = g_2(\overline{x}) = g_3(\overline{x}) = 0$ au voisinage du point $\overline{a}$. (*Pour fixer les idées, on choisira d'expliciter les premières variables en fonction des autres*).
2. Définissez précisément ce que veut dire qu'il s'agit d'une explicitation locale de la relation.

C. Exercices (environ 40% des points)

C.1. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculez le rang de A. Que peut-on en déduire à propos de valeurs propres de A ?
2. Utilisez ce qui précède et $\mathrm{tr}(A)$ pour donner toutes les valeurs propres de A.
3. Diagonalisez A au moyen d'une matrice orthogonale. (Donnez la matrice B qui orthogonalise et la matrice diagonale qu'elle permet d'obtenir).
4. Quel est le genre de la forme quadratique associée à A ?
5. Ecrivez la forme quadratique $\overline{X}^t A \overline{X}$ (où $\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) sous la forme d'une somme pondérée de carrés en x, y et z.

C.2. On cherche à extrémer $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

1. Ecrivez matriciellement les conditions nécessaires (théorème du rang) qui permettent de sélectionner les candidats extrémums de ce problème.
2. Transformez ces conditions en un système d'équations.
3. Résolvez ce système pour trouver tous les points qui répondent à ces conditions.
4. Sachant que la fonction f admet un maximum et un minimum absolu sous ces contraintes, donnez les solutions du problème (valeur des extrémums absolus et points où ils sont atteints).