NOM et Pr. :

ECGE1214 - Mathématiques - Examen du 9 décembre 2005

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le verso des feuilles peut être utilisé.

A. Survol de la matière (environ 40% des points)

Quand il y a lieu, il faut cocher la ou les réponses correctes.

A.1. L est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Calculez $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ ☐ et la matrice $A =$ ☐ qui représente L.

- Donnez des équations paramétriques de Im L ☐

ainsi que dim(Im L) = ☐ et une base de Im(L) ☐

- Donnez des équations cartésiennes de Ker L ☐ ainsi que

dim(Ker L) = ☐ , une base de Ker(L) : ☐ et des équations

paramétriques des solutions du système $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐

Justifications au verso.

A.2. A est une matrice 3×4 , B une matrice 4×3 et C une matrice carrée d'ordre 3.
Pour chacun des cas ci-dessous, complétez la colonne correspondante.
Il peut y avoir plusieurs réponses possibles ; dans ce cas, donnez les toutes.
Certains cas peuvent être impossibles ; signalez-les.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
$r(A)$				
dim Ker A	$= r(A)$		1	
$r(B)$		2		
$r(C)$		3		
dim Ker C				
$r(AB)$	2	2	3	3
$r(BA)$	$= r(AB)$			3
dim Ker BA		≤ 2	0	
$r(BC)$	3		2	2

Justifications (tout doit être justifié) :

A.3. A est une matrice symétrique 4×4 dont les MPP (du plus petit au plus grand) sont

$$M_1 = -1 \qquad M_2 = 2 \qquad M_3 = 0 \qquad M_4 = 4.$$

On peut en déduire que	Vrai	Faux	Peut-être
r(A)=3	◯	◯	◯
A est semi-définie négative	◯	◯	◯
A est indéfinie	◯	◯	◯
A admet au moins une valeur propre nulle	◯	◯	◯
A admet au moins une valeur propre strictement négative	◯	◯	◯
A admet deux valeurs propres strictement positives	◯	◯	◯

Justifications (tout doit être justifié) :

NOM et Pr. :

B. Questions théoriques (environ 20% des points)

B.1. Définissez l'expression

La forme quadratique $q(\overline{x})$ est semi définie négative.

B.2. Parmi les théorèmes liant le genre d'une matrice symétrique et les signes de ses mineurs principaux primaires ou de ses mineurs principaux, énoncez (seulement) ceux qui peuvent s'exprimer sous la forme de conditions nécessaires et suffisantes.

B.3. Démontrez que le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale.

NOM et Pr. :

C. Exercice (environ 40% des points)

C.1. On se propose d'étudier la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- On peut remarquer que la troisième colonne de A est la somme de sa première et de sa quatrième colonne.

  Tirez de cette remarque des informations (éventuellement incomplètes) sur
  1. le rang de A 2. le déterminant de A 3. des valeurs propres de A
  4. des vecteurs propres de A. 5. le noyau de A

- On donne de plus l'information qu'un sous-espace propre de A peut être décrit par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

  Donnez
  1. une base de ce sev ;
  2. la valeur propre associée à ce sev ;
  3. la multiplicité géométrique et la multiplicité algébrique de cette valeur propre.

- Donnez toutes les valeurs propres de la matrice A.
- Donnez une matrice qui diagonalise A et la matrice diagonale associée.
- Poussez le calcul pour donner une matrice orthogonale qui diagonalise A.