1/ L'algorithme du simplexe

1. Description

Méthode de résolution de programmes linéaires qui recherche l'optimum en partant d'1 sommet du polyhèdre qui délimite l'espace des solutions réalisables. A partir de ce sommet (une base) on "saute" vers un autre sommet jusqu'à trouver l'optimum.

2. Première étape : écriture du problème sous forme canonique.

2.1 forme canonique

$$\underset{\text{Min}}{\text{Max}} \quad z = c^T x$$

$$\text{s.c} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

2.2 méthodes de transformation (objectif : arriver à des égalités ds les contraintes)

* Pour les contraintes $\leq$, on ajoute 1 variable d'écart
* Pour les contraintes $\geq$, on soustrait 1 variable d'écart
* Pour les variables non restreintes, on les substitue par 2 variables

2.3 le tableau canonique

Soit $\text{Max } z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$\text{s.c.} \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + x_4 = b_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Le tableau canonique sera comme suit

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
(L_1)	a_{11}	a_{12}	1	0	0	$= b_1$
(L_2)	a_{21}	a_{22}	0	1	0	$= b_2$
obj.	$-c_1$	$-c_2$	0	0	1	$= 0$

3. Deuxième étape : la recherche d'1 base faisable de départ

Reprenons le problème 2.3. On se retrouve avec 1 système de 2 équations à 4 inconnues. $\exists$ 1 infinité de solutions.

Nous cherchons une solution faisable. C'est-à-dire $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ telle que $x_i^* \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$.

Si on fixe à zéro 4-2 variables, on retrouve 1 système de 2 équations à 2 inconnues => 1 solution unique. Les variables fixées à 0 seront appelées <u>variables hors base</u> et les autres <u>variables en base</u> (Voir syllabus p41)

Dans le cas présent, on fixe $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 0$ de sorte qu'immédiatement on a $x_3^* = b_1$ et $x_4^* = b_1$. $z = 0$ dans ce cas.

Nous avons notre base réalisable !

⚠ Trouver cette solution n'est pas toujours trivial : voir la méthode des deux phases.

4. Saut vers une meilleure solution.

4.1 Recherche des variables entrante et sortante

Supposons que le programme 2.3 est 1 maximisation.

Dans le tableau canonique, nous avons en fait écrit l'équivalent de

$$\text{Max} \quad z - c_1 x_1 - c_2 x_2 = 0$$

Notre solution de base nous amène à $z = 0$ puisque x_1^* et x_2^* sont nuls. On en voit immédiatement que, si c_1 (resp. c_2) est positif alors toute augmentation de x_1 (resp. x_2) permettra d'augmenter z.

Dans 1 premier temps, nous allons tenter d'augmenter le x_i dont la contribution à l'objectif est la plus importante <u>tout en restant de l'espace des solutions admissibles</u>. Cela veut dire veiller à ce que l'augmentation de x_i n'amène une des autres variables (celles en base) à devenir plus petit que 0.

ex : supposons $c_1 > c_2$. On choisit donc d'augmenter x_1 (<u>x_1 entre en base</u>), x_2 reste à 0. Dans ce cas, puisque l'on a les égalités suivantes :

$$(1) \quad x_3 = b_1 - a_{11} x_1$$
$$(2) \quad x_4 = b_2 - a_{12} x_1$$

et x_3, x_4 doivent être ≥ 0

on peut augmenter x_1 jusqu'à ce que dans une des deux équations on arrive à $x_j = 0$. Supposons que x_3 soit la "première" à arriver à 0. On l'appelle alors "<u>variable sortante</u>".

Sur le tableau canonique, on effectue une série ~~[illegible]~~ d'opérations (multiplication par 1 constante, sommes de lignes, ... bref toutes les opérations matricielles de base) de sorte que l'on arrive à 1 programme dans lequel le coefficient de x_1 dans (L_1) soit de 1 et dans (L_2) de 0 + dans l'objectif.

On obtient le tableau canonique suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	0	
$L_1 \leftarrow L_1 \cdot \frac{1}{a_{11}}$	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	0	0	$\frac{b_1}{a_{11}}$
$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot L_1$	0	$a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{21}}{a_{11}}$	1	0	$b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot b_1$
$Obj \leftarrow Obj + \frac{c_1}{a_{11}} \cdot L_1$	0	$-c_2 + \frac{c_1}{a_{11}} \cdot a_{12}$	$\frac{c_1}{a_{11}}$	0	1	$\frac{c_1}{a_{11}} \cdot b_1$

Avec cette itération, on a "glissé" jusqu'au point $\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0, 0, b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1\right)$ avec $z = \frac{c_1}{a_{11}} \cdot b_1$. Les variables en base sont x_1^* et x_4^* (les colonnes de leur coéfficients respectifs forment ensemble 1 matrice unitaire et leur coefficient dans la fonction objectif est nul).

5. Est-ce optimal ?

La solution sera optimale si il n'est plus possible en augmentant une des variables hors base d'améliorer la solution.
concrètement, il faut pour cela que (dans ce cas-ci) $\frac{c_{11}}{a_{11}}$ et $-c_2 + \frac{c_1}{a_{11}} \cdot a_{12}$ soient positifs. (si l'un des deux est nul, c'est 1 cas particulier). Appelons-les, par facilité c_2' et c_3'. Avoir c_2' et c_3' positifs amène à avoir :

$$\text{Max } z + c_2' x_2 + c_3' x_3 = \frac{c_1}{a_{11}} \cdot b_1$$

Augmenter x_2, en gardant x_3 à 0, amènerait à diminuer z sans quoi le terme de gauche dans l'égalité serait différent de celui de droite.

Si c_2' ou c_3' est mégatif , on retourne au point 4.

5. Remarques et cas particuliers (en vrac)

* Avoir une valeur mégative dans la dernière colonne (celle de b) m'est pas permis/possible car cela entraîne qu'une des variables en base soit mégative ⇒ ce m'est alors pas une solution réalisable

* Dans le cas d'une minimisation, la méthode ne varie que pour la détermination de la variable entrante. Plutôt que de prendre le + positif entre c_1 et c_2, on choisira le + mégatif.
(Note : "prendre le + positif entre c_1 et c_2" veut bien dire sélectionner le + mégatif de $-c_1$ et $-c_2$ dans le tableau canonique)

Et l'on s'arrête, dans le cas d'une minimisation, lorsque les coefficients "objectif" <u>dans le tableau canonique</u> sont tous mégatif

* Lorsque, pour une variable hors base, le coefficient de la fonction objectif est nul, cela signifie qu'il y a plusieurs optima

* Si une des variables en base est nulle, cela correspond à une dégénérescence : 1 contrainte est redondante.

* Si a un moment donné, tous les coefficients dans les contraintes d'un des variables hors base ≤ 0 alors l'espace des solutions dans cette direction n'a pas de limite.
Si en plus, le coefficient dans l'objectif de cette variable est mégatif/positif pour 1 problème de maximisation/minimisation alors z est aussi illimité.

* le problème est impossible si on trouve 1 variable artificielle non nulle lors de la méthode des 2 phases !